

CONCOURS D'ENTRÉE

1978

OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en compte par le correcteur.

Dans tout le problème $\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

On rappelle qu'une fonction monotone admet en tout point une limite à droite et une limite à gauche.

I

On définit les suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$(1) \quad a_0 = a > 0, \quad b_0 = b > 0$$

et

$$(2) \quad a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot b_{n-1}}, \quad b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \quad \forall n \geq 1$$

1°) a) Montrer qu'on a $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq 1$.

b) Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones.

Montrer qu'elles sont convergentes.

Montrer enfin qu'elles ont même limite. On notera cette limite $M(a, b)$ sans chercher à la calculer.

On a ainsi défini une application de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}$: $(a, b) \mapsto M(a, b)$

2°) Montrer que $M(a, b)$ vérifie les propriétés suivantes :

$$M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*; \quad M(a, b) = M(b, a); \quad M(a, b) = M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$$

$$a \leq a' \implies M(a, b) \leq M(a', b).$$

- 2 -

3°) On note $f(x) = M(x, 1)$

Montrer que f vérifie les relations :

$$f(1) = 1; \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}; \quad \sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{1+x}{2};$$

$$\frac{1+x}{2} \cdot f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = f(x)$$

4°) a) Montrer que, si g est une application croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et si la fonction $x \mapsto \frac{g(x)}{x}$ est décroissante, alors g est continue.

b) Montrer que la fonction f est continue.

5°) a) Montrer que $f(x)$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$.

Quelle est cette limite ?

b) Montrer que $f(x)$ admet une limite quand x tend vers 0 par valeurs positives.

Quelle est cette limite ?

c) Tracer la courbe représentative de f en précisant le comportement de f à l'origine et à l'infini.

II

On définit les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = a > 0, \quad v_0 = b > 0, \quad u_n = \sqrt{u_{n-1} \cdot v_n}, \quad v_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} \quad \forall n \geq 1$$

On suppose $b < a$ et on écrit $b = a \cos \theta$ avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

1°) Calculer u_n et v_n en fonction de n et de θ .

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones.

2°) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont une même limite $N(a, b)$

que l'on calculera en fonction de a et de θ . (On pourra utiliser $u_n \cdot \sin \frac{\theta}{2^n}$...)

3°) Montrer par récurrence que $u_n \geq a_n$ et $v_n \geq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont définies par les relations (1) et (2)

4°) Calculer $N\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

5°) Comparer $N(a, b)$ et $M(a, b)$. Peut-il y avoir égalité ?

III

Soient a et b deux réels strictement positifs.

On note
$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

et, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, on pose $F(x) = I(x, 1)$.

1°) Montrer que F est monotone.

2°) Montrer les égalités $y \cdot I(x, y) = F\left(\frac{x}{y}\right)$ et $F\left(\frac{1}{x}\right) = x \cdot F(x)$.

3°) En déduire, par exemple en appliquant la question I 4°) a) à $\frac{1}{F}$, que F

est continue.

4°) Montrer que l'application de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y) fait correspondre $I(x, y)$ est continue.

IV

On admettra la convergence de toutes les intégrales qui interviendront. a et b sont maintenant des réels vérifiant $0 < a < b$.

1°) On pose $u = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

Calculer φ en fonction de u . Calculer $\frac{d\varphi}{du}$

Montrer qu'on a

$$I(a, b) = \int_a^b \frac{du}{\sqrt{(b^2 - u^2)(u^2 - a^2)}}$$

2°) a) On pose $h(u) = \frac{u^2 + ab}{2u}$. Trouver $\alpha \in]a, b[$ tel que h admette une fonction

réciproque H_1 sur $]a, \alpha]$ et une fonction réciproque H_2 sur $[\alpha, b[$.

b) Expliciter les fonctions $v \mapsto H_1(v)$ et $v \mapsto H_2(v)$.

3°) Montrer que, si $v = h(u)$ on a $2u \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - v^2} = \sqrt{(b^2 - u^2)(u^2 - a^2)}$

Faire le changement de variable $v = h(u)$ dans $I(a, b)$, en séparant les intervalles $]a, \alpha]$ et $[\alpha, b[$

4°) a) En déduire l'égalité $I(a, b) = I\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$

b) Calculer $I(a, b)$ en fonction de $M(a, b)$ et $F(x)$ en fonction de $f(x)$.